



DIFFUSION DE RAYLEIGH GENERALISEE ET SINGULARITE DE LA FONCTION DE GREEN

Jacques Lavergnat

► To cite this version:

Jacques Lavergnat. DIFFUSION DE RAYLEIGH GENERALISEE ET SINGULARITE DE LA
FONCTION DE GREEN. 2015. hal-01291071

HAL Id: hal-01291071

<https://hal.science/hal-01291071>

Preprint submitted on 1 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DIFFUSION DE RAYLEIGH GENERALISEE ET SINGULARITE DE LA FONCTION DE GREEN

Jacques Lavergnat

Décembre 2015

RÉSUMÉ

On donne une nouvelle démonstration de la solution classique des équations de Maxwell sous forme intégrale. Le résultat, proche dans sa forme des potentiels retardés, permet de comprendre comment s'introduit la singularité de la fonction dyadique de Green lorsqu'on veut s'en tenir à une formulation canonique. On donne alors, dans le cas de la diffusion par un corps fini isolé, une solution sous forme d'une équation intégrale que l'on s'attache à résoudre dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes. On montre, ce qui est classique, qu'on retombe alors dans l'approximation de Rayleigh. En revanche, on s'aperçoit que cette approximation est plus restrictive que ce qui est souvent dit dans la littérature. Une généralisation est donc suggérée et une application à la diffusion par des gouttes d'eau est proposée.

ABSTRACT

A new derivation of the integral form of Maxwell equations is given. The results, in the same spirit as the delayed potential, provides a deeper insight into the singularity of the dyadic Green function in its canonical presentation. An integral equation is then derived for the case of the diffusion by a finite scatterer. The assumption of large wavelengths leads back, as expected, the Rayleigh solution. However, it appears that this approximation is more restrictive than what it is currently admitted in the classical literature. An extended version is thus proposed with an application to the scattering by raindrops.

1 Introduction

La résolution du problème de la diffusion des ondes électromagnétiques par un diélectrique fini intervient dans de très nombreuses applications. Parce qu'en général la solution est à réutiliser dans un schéma de calcul complexe, l'approximation de Rayleigh est avantageuse, lorsqu'elle est licite, du fait qu'elle fournit une solution analytique. Dans le domaine de la radar-météorologie par exemple, elle est à l'origine d'une quantité discriminante appelée réflectivité. Toutefois dans sa version simplifiée elle suppose le diffuseur ponctuel. Il en résulte une impossibilité à rendre compte des phénomènes de transpolarisation. Admettre que le diffuseur est ponctuel revient à supposer que le champ électromagnétique induit à l'intérieur du diffuseur est constant. Il correspond alors à la solution "électrostatique". Cette analyse se confirme facilement pour un diffuseur sphérique. Son extension à un ellipsoïde est connue depuis longtemps [1]. Cependant sa généralisation à un diffuseur de forme quelconque ne va pas sans difficultés, la solution électrostatique n'étant plus uniforme.

Nous proposons dans ce qui suit une approche suggérant un schéma de calcul explicite d'une approximation se confondant avec celle de Rayleigh dans les cas où cette dernière est licite. On s'aperçoit alors que la solution préconisée utilise le même dyade que celui qui sert à lever la singularité de la fonction dyadique de Green [2]. Une application numérique à une goutte de pluie est enfin présentée et prouve que pour certains problèmes (p.e. dépolarisation) la modification par rapport aux solutions classiques est sensible.

2 Champ produit par une source

Dans un milieu isotrope, permanent et homogène, de permittivité ϵ et de perméabilité μ , où \mathbf{j}^1 est la source de courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Pour une source harmonique en $\exp(i\omega t)$ on obtient par substitution, après avoir posé $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{j} + k^2\mathbf{E} \quad (3)$$

La difficulté majeure de l'équation (3) provient de ce que l'opérateur double rotationnel n'est pas diagonal. En revanche si l'on pose $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{E}$, il vient :

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = i\omega\mu \nabla \wedge \mathbf{j} \quad (4)$$

1. On adopte la convention d'écrire les vecteurs et les matrices en gras, le contexte permettant généralement de les distinguer.

L'équation (4) est diagonalisée, elle se décompose donc en trois équations scalaires indépendantes du type $\Delta f + k^2 f = S$. Sa résolution se fait alors classiquement à l'aide de la fonction de Green scalaire

$$g(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (5)$$

et la solution de (4) s'écrit

$$\mathbf{A} = -i\omega g(\mathbf{r}) \mathbf{I} \star \nabla \wedge \mathbf{j} = -i\omega \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6)$$

où l'opérateur \star désigne la convolution.

A ce point du développement il n'y a aucun problème car l'intégrale est toujours définie, la fonction de Green variant comme $1/r$. Pour obtenir explicitement le champ électrique, il suffit d'utiliser l'identité (3) écrite sous la forme $\nabla \wedge \mathbf{A} = -i\omega\mu\mathbf{j} + k^2\mathbf{E}$ et l'on obtient :

$$\mathbf{E} = \frac{-i\omega\mu}{k^2} [-\delta(\mathbf{r} + \nabla \wedge \nabla \wedge) [(g\mathbf{I}) \star \mathbf{j}]] \quad (7)$$

On note que l'équation (7) ne s'identifie pas à la formulation habituelle [3, 4]

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{G} \star \mathbf{j} \quad \text{avec } \mathbf{G} = \frac{1}{k^2} [-\delta(\mathbf{r} + \nabla \wedge \nabla \wedge) g\mathbf{I}] \quad (8)$$

\mathbf{G} est la fonction de Green dyadique, connue également sous la forme équivalente [4]

$$\mathbf{G} = [1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot] g\mathbf{I}$$

Pour passer de (7) à (8) il suffirait de permuter l'intégration et les dérivations. Cette opération n'est cependant pas licite du fait que l'intégrale de convolution dans (8) est impropre puisque la fonction de Green dyadique se comporte en $1/r^3$. L'intégrale n'a de sens qu'au prix d'une régularisation, en partie arbitraire, ce qui explique les différentes formules selon le volume d'exclusion choisi [3]. Il est intéressant de pousser plus loin l'analyse de (7). En effet, si l'on pose

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = g\mathbf{I} \star \mu\mathbf{j}(\omega)$$

puis qu'on en prenne la transformation de Fourier inverse on retrouve le potentiel vecteur retardé :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

et en prenant la transformée inverse de (6), le champ électrique :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon\mu} \int \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, \tau) d\tau$$

Au terme de cette discussion, il apparaît que la formulation (7), toujours définie, ne souffre d'aucune ambiguïté et n'est en fait qu'une version de la méthode du potentiel vecteur retardé. On va maintenant exploiter l'équation (7) pour traiter de la diffusion par un diélectrique.

3 Diffusion par un diélectrique

Le diffuseur de volume V est limité par une surface S . Les indices $+$ et $-$ symbolisent respectivement l'extérieur et l'intérieur. Les propriétés diélectriques sont données par la permittivité $\epsilon(\mathbf{r})$, et la perméabilité $\mu(\mathbf{r})$. Le milieu ambiant est supposé être le vide, ce qui n'amointrit pas la portée du raisonnement. La figure 1 résume la géométrie du problème. Le diffuseur est immergé dans un champ électromagnétique incident $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ créé par des sources appropriées \mathbf{j} situées à l'extérieur du diffuseur. Le problème de la

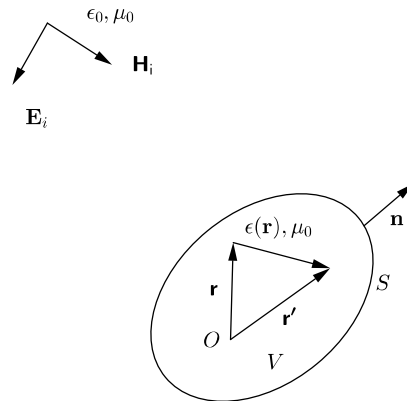


FIGURE 1 – Géométrie de la diffusion

diffusion est donc de déterminer partout le champ électromagnétique résultant que l'on divise en deux parties :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (9)$$

$\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}_s(\mathbf{r})$ représentent le champ diffusé.

Parce que les champs incidents sont solution des équations (1) et (2) avec $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0$, on obtient par substitution pour le champ

diffusé le système d'équations suivant :

$$\nabla \mathbf{E}_s = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} \quad (10)$$

$$\nabla \mathbf{H}_s = (\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t} \quad (11)$$

Le système (10) et (11) est identique au système (1) et (2) au terme source près qui est alors

$$(\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Une application directe de (7) nous fournit donc l'égalité :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + [1 + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \cdot] [g \mathbf{I} \star (k^2(\mathbf{r}) - k_0^2) \mathbf{E}] \quad (12)$$

(12) n'est pas une solution au sens élémentaire du terme, c'est une équation de type « intégrale ». Par hypothèse $k_+^2(\mathbf{r}) = k_0^2$, l'équation (12) se divise donc en deux parties distinctes correspondant respectivement à l'extérieur du diélectrique et à l'intérieur du diélectrique.

$$(\mathbf{r}) \notin V \Rightarrow \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{G} \otimes (k^2(\mathbf{r}) - k_0^2) \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) \quad (13)$$

$$(\mathbf{r}) \in V \Rightarrow \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{G} \otimes (k^2(\mathbf{r}) - k_0^2) \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) \quad (14)$$

Pour bien marquer la différence d'avec la formulation classique conduisant aux singularités déjà évoquées, nous avons introduit le symbole \otimes au lieu du symbole classique de convolution \star . Il signifie que la convolution doit être faite avant que les opérateurs différentiels ne soient appliqués.

(13) montre que le champ à l'extérieur du diffuseur peut être calculé par simple quadrature, pourvu que l'on connaisse le champ à l'intérieur. Celui-ci, en revanche est déterminé par (14) qui est une équation intégrale volumique restreinte à l'intérieur du diffuseur.

4 Diffusion de Rayleigh

L'expression (13) rappelle la démarche conduisant à l'approximation de Rayleigh où l'on admet que le champ régnant à l'intérieur du diffuseur est celui fourni par le problème du même diffuseur plongé dans un champ électrostatique uniforme. Cette hypothèse « résout » en quelque sorte l'équation (14) et l'on voit bien qu'elle revient à considérer le diffuseur comme très petit devant la longueur d'onde, donc à considérer la situation limite $k_0 \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow 0$. Nous allons maintenant explorer en détail cette approximation.

Approximation basse fréquence

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow k_0 \rightarrow 0$ et $k(\mathbf{r}) \rightarrow 0$. En ne conservant que les termes à l'ordre le plus bas en k_0 , l'équation (14) s'écrit

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \cdot \left[\frac{1}{r} \mathbf{I} \star \left(\frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon_0} - 1 \right) \right] \mathbf{E}_- \quad (15)$$

où \mathbf{E}_i est une constante.

Si l'on suppose que le diffuseur est homogène de permittivité relative $\eta = \epsilon/\epsilon_0$ constante (15) devient

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{\eta - 1}{4\pi} \nabla \nabla \cdot \left[\frac{1}{r} \mathbf{I} \star \mathbf{E}_- \right] \Big|_V \quad (16)$$

L'indice V rappelle que la convolution est restreinte au diffuseur. Le terme entre crochets doit être évaluée en premier conformément à la discussion précédente. Il s'écrit explicitement :

$$\frac{\mathbf{I}}{r} \star \mathbf{E}_- \Big|_V = \int_V \frac{E_-(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Le vecteur unitaire

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

a pour divergence par rapport à \mathbf{r}'

$$\nabla' \cdot \mathbf{d} = \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Il en découle la relation

$$\int_V \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \int_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} dS$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au volume V .

Faisons alors l'hypothèse que le champ \mathbf{E}_- soit constant. Il vient alors :

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) - \frac{\eta - 1}{8\pi} \nabla \nabla \cdot \left[\int_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} dS \right] \mathbf{E}_- \quad (17)$$

Parce que maintenant nous avons une intégrale de surface, nous pouvons légitimement passer les opérateurs différentiels sous le signe somme sans craindre de singularité. Rappelons en outre que l'on cherche à résoudre (17) pour \mathbf{r} à l'intérieur du volume et non sur sa surface. Un calcul dyadique direct donne :

$$\nabla \nabla \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}] = \frac{1}{d^2} [2\mathbf{d}\mathbf{n} + \mathbf{I}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) - 3\mathbf{d}\mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})] \quad (18)$$

L'expression (18) recèle déjà un résultat intéressant. Si l'on prend l'origine des coordonnées en \mathbf{r} , l'élément différentiel dS est en d^2 , il

compense donc les dénominateurs, ce qui prouve que c'est la forme du diffuseur qui joue un rôle et non sa taille. Ce choix particulier de l'origine permet également de faire intervenir l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit dS .

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} dS = d^2 d\Omega$$

On montre alors facilement que les deux derniers termes de (18) s'annulent après intégration, ce qui aboutit au résultat final :

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) - \left[\frac{\eta - 1}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{n}}{d^2} dS \right] \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) \quad (19)$$

On voit que s'introduit naturellement le dyade

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{n}}{d^2} dS \quad (20)$$

La solution cherchée s'écrit donc :

$$\mathbf{E}_- = (\mathbf{I} + (\eta - 1)\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{E}_i \quad (21)$$

On peut vérifier facilement que pour une sphère $\mathbf{D} = \mathbf{I}/3$, et l'on retrouve la solution bien connue de Rayleigh

$$\mathbf{E}_- = \frac{3\mathbf{E}_i}{2 + \eta}$$

La démonstration montre cependant que cette solution n'est pas bonne pour toutes les formes de diffuseurs. En effet, nous ne sommes parvenus à (21) qu'en ayant supposé \mathbf{E}_- constant à l'intérieur du diffuseur. Ce résultat n'a donc de sens que si le dyade \mathbf{D} est indépendant de \mathbf{r} . Or si cela est vrai pour certaines formes particulières (sphère, ellipsoïde..), il est aisé de montrer que *cela est faux en général*. Autrement dit, l'affirmation selon laquelle la solution de Rayleigh est applicable quelle que soit la forme du diffuseur pourvu qu'il soit petit est erronée.

En revanche pour les formes particulières ayant la propriété évoquée ci-dessus, l'extension (21) est légitime. L'extension à un ellipsoïde est connue depuis longtemps [5]. Une fois le champ intérieur connu, le champ extérieur se calcule par simple quadrature (13) et loin du diffuseur on obtient la solution classique :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}_s \mathbf{k}_s}{k_0^2} \right] \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} V k_0^2 (\eta - 1) \mathbf{E}_- \quad (22)$$

où \mathbf{k}_s est le vecteur d'onde du champ diffusé.

5 Singularité de la fonction de Green

Lorsqu'on adopte la formulation classique (8), on est obligé de régulariser l'intégrale pour lui donner un sens, de préférence

univoque.

On trouve dans la littérature [3, 4, 5], des formulations différentes mais qui peuvent se rassembler dans une seule formule :

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \lim_{V_e \rightarrow 0} i\omega\mu \int_{V-V_e} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{i\epsilon\omega} \mathbf{D}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (23)$$

En fait, toutes ces formulations procèdent de la technique de régularisation des intégrales impropres. On sait qu'il existe une infinité de manière de procéder à cette régularisation, chacune se différenciant par l'adjonction d'un terme dépendant de la manière dont on « exclut » le point de divergence.

Par exemple, la fonction $1/x$ peut se régulariser par l'intermédiaire de l'expression

$$\int \frac{\phi(x)}{x} dx \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{-a} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_b^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{-a}^b \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx$$

A chaque choix du couple $(a, b) > 0$ correspond une régularisée qui diffère d'une autre par un terme additif de type $c\delta(x)$.

Il faut donc bien comprendre que dans l'expression (23) la valeur de \mathbf{D} est dépendante du volume d'exclusion V_e . En particulier, conformément à la discussion précédente il est donc nécessaire que le volume d'exclusion soit « centré » sur le même point qui sert d'origine pour évaluer le dyade \mathbf{D} . Cette précaution n'a jamais encore, à notre connaissance, été soulignée.

6 Diffusion de Rayleigh généralisée

Pour les diffuseurs conduisant à une dyade \mathbf{D} indépendante de \mathbf{r} , comme les sphères ou les ellipsoïdes, il n'y a pas de difficultés. En revanche lorsque \mathbf{D} dépend de \mathbf{r} on ne peut plus facilement résoudre l'équation intégrale (19).

Une première approximation consiste à remplacer la dyade \mathbf{D} par sa moyenne sur le volume du diffuseur :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \frac{1}{4\pi V} \int_V d\mathbf{r} \int_S \frac{d\mathbf{n}}{d^2} dS \quad (24)$$

Avec ce choix, on obtient ce qu'on peut appeler l'approximation de Rayleigh généralisée au sens où elle généralise les solutions connues dans le cas des ellipsoïdes.

$$\mathbf{E}_- = (\mathbf{I} + (\eta - 1) \langle \mathbf{D} \rangle)^{-1} \cdot \mathbf{E}_i \quad (25)$$

On verra plus loin que cette hypothèse ne donne pas un résultat très différent de celui obtenu avec un \mathbf{D} calculé au « centre » du diffuseur. Cela mérite en tout cas d'être vérifié pour chaque forme particulière.

Pour finir ce paragraphe signalons deux propriétés intéressantes de \mathbf{D} et $\langle \mathbf{D} \rangle$ [3]. Un calcul dyadique classique montre que :

$$\text{Trace } \langle \mathbf{D} \rangle = \text{Trace } \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{d^2} dS = 1$$

De plus

$$\nabla \wedge \frac{\mathbf{d}}{d^3} = 0 \Rightarrow \int_S \frac{\mathbf{d} \wedge \mathbf{n}}{d^2} dS = 0$$

En conséquence \mathbf{D} et $\langle \mathbf{D} \rangle$ sont symétriques.

Cela signifie que $\langle \mathbf{D} \rangle$ ne dépend que de 5 composantes.

7 Application à la diffusion par une goutte d'eau

Pour illustrer les considérations précédentes, nous allons appliquer les résultats obtenus au cas de la diffusion par une goutte d'eau. Cette question trouve un renouveau d'intérêt par l'usage de plus en plus fréquent des techniques de multipolarisation.

Quelle que soit la forme des gouttes que nous choisirons, elle aura une symétrie axiale tout à fait conforme aux observations. Cet axe de symétrie est pris comme axe Oz , et sans amoindrir notre propos, on l'assimile à la verticale. O est le « centre » de la goutte. On va comparer le champ rétrodiffusé par trois types de gouttes de diamètre équivalent égal à 5 mm.

7.1 Goutte sphérique

La dyade $\langle \mathbf{D} \rangle$ ne dépend pas de \mathbf{r} et l'on retrouve le résultat classique déjà mentionné

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{D} = \frac{\mathbf{I}}{3}$$

ce qui entraîne le résultat

$$\mathbf{E}_- = \frac{3\mathbf{E}_i}{(2 + \eta)}$$

Il n'y a pas de transpolarisation de l'onde seulement une extinction (affaiblissement + diffusion).

7.2 Sphéroïde : forme de Morisson et Cross [6]

La goutte est un sphéroïde aplati, c'est à dire le volume obtenu par rotation autour du petit axe d'une ellipse. Le rapport des axes est donné par $1 - R$, où R est le rayon équivalent exprimé en cm. Dans notre cas cela conduit à un demi-petit axe b de 2,064mm, un demi-grand axe a de 2,75 mm et une ellipticité e de 0.75. L'équation polaire est

$$\rho(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}}$$

son aspect est représenté figure 2. La dyade \mathbf{D} se calcule analyti-

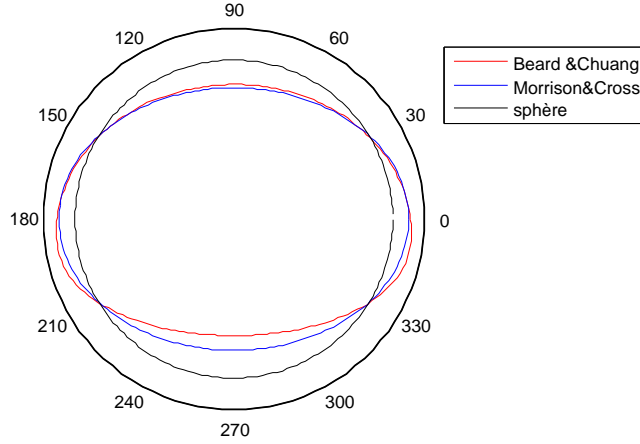


FIGURE 2 – Différentes formes de goutte d'eau ayant un rayon équivalent de 2,5mm

quement et l'on obtient :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$D_1 = \frac{e^2}{2(1-e^2)} \left[-1 + \frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} \right] \quad \text{et} \quad D_2 = 1 - 2D_1$$

On vérifie (laborieusement) que la dyade \mathbf{D} est bien indépendante du point \mathbf{r} de référence choisi. On retrouve alors le résultat obtenu dans le cas électrostatique par Stratton [1].

Numériquement, on trouve pour notre exemple $D_1 = 0,2937$ et $D_2 = 0,4126$.

7.3 Forme de Beard et Chung [7]

Cette forme résulte de mesures expérimentales. Son aspect est visible sur la figure 2. Analytiquement la courbe méridienne est donnée en coordonnées polaires par le développement

$$\rho(\theta) = 2,5 \left[1 + \sum_{n=0}^{10} c_n \cos n(\theta + \pi/2) \right]$$

Les coefficients du développement sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^4 c_n$	-644	-416	-1629	-246	-176	131	2	-44	-18	9	14

La dyade \mathbf{D} ne se calcule plus analytiquement. Il n'y a pas de problème pour son évaluation numérique. On s'aperçoit alors que le résultat dépend du point de référence choisi. On a donc estimé la valeur moyenne de la dyade sur la goutte d'eau par une méthode de Monte-Carlo. On obtient :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \begin{pmatrix} 0,2865 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2865 & 0 \\ 0 & 0 & 0,427 \end{pmatrix}$$

On remarque que ces valeurs sont extrêmement proches de celles obtenues lorsque le point de référence est situé à l'origine :

$$\mathbf{D}(O) = \begin{pmatrix} 0,285 & 0 & 0 \\ 0 & 0,285 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4301 \end{pmatrix}$$

7.4 Comparaison et discussion

Il n'est pas possible de présenter une comparaison exhaustive de la diffusion dans les trois cas. Nous avons choisi de se concentrer sur la rétrodiffusion, situation fondamentale des techniques radar. On se place donc à 5 GHz, ce qui conduit à un indice de réfraction de l'eau à 15°C égal à :

$$n = \sqrt{\eta} = 8,707 - i1,336$$

On pose

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I} + (\eta - 1) \langle \mathbf{D} \rangle]^{-1}$$

Les dyades $\langle \mathbf{D} \rangle$ que nous avons calculé sont toutes diagonales. Il en est donc de même de \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\eta-1)\langle D_1 \rangle} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+(\eta-1)\langle D_1 \rangle} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+(\eta-1)\langle D_2 \rangle} \end{pmatrix}$$

La combinaison de (21) et (22) permet après des calculs géométriques élémentaires de connaître le rapport complexe t entre les champs électriques rétrodiffusés en polarisation verticale et horizontale. Le paramètre qui intervient est l'angle α entre la verticale et le vecteur d'onde incidente \mathbf{k}_i .

$$t = \frac{B_1 \cos^2 \alpha + B_2 \sin^2 \alpha}{B_1}$$

La figures 3 montre la variation du module et de l'argument de t en fonction de α . Pour une sphère, on a évidemment $t = 1$. On

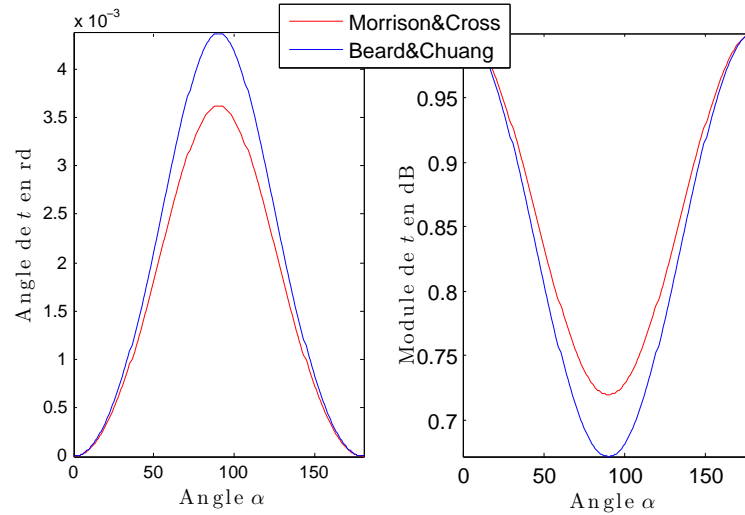


FIGURE 3 – Comparaison de la rétrodiffusion selon la polarisation horizontale ou verticale entre différents modèles de goutte.

voit donc sur ces figures que la non prise en compte de la forme exacte des gouttes peut conduire à des erreurs sensibles lorsqu'on s'intéresse aux aspects liés à la polarisation.

8 Conclusion

Le travail présenté dans ce papier montre que l'on peut exprimer le champ diffusé par une intégrale (12) parfaitement définie. Cette formulation permet de calculer de façon simple (une quadrature) la solution de Rayleigh et ce quelle que soit la forme du diffuseur. On garde ainsi une expression analytique du champ diffusé (22) mais avec des valeurs de coefficients de meilleure qualité.

Bibliographie

- [1] Stratton J.A. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, NY, 1941.
- [2] Yaghjian A.D. Electric dyadic green's functions in the source region. *Proc. IEEE*, 68(2) :248–262, 1980.
- [3] Chew W.C. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE press, 1995.
- [4] Van Bladel J. Some remarks on green's dyadic for infinite space. *IRE Trans. Antennas Propag.*, AP 9 :563–566, 1961.
- [5] Ishimaru A. *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*. Prentice Hall, 1991.

- [6] Morrison J.A. and Cross M.J. Scattering of a plane electromagnetic wave by axisymmetric raindrops. *BSTJ*, 53(6) :955–1019, 1974.
- [7] Beard K.V. and Chuang C. A new model for the equilibrium shape of raindrops. *J. Atmos. Sci.*, 44(11) :1509–1524, 1987.